Curso avanzado: Matemáticas dinámicas con GeoGebra

Josep Lluís Cañadilla Pep Bujosa

Día GeoGebra 9 de septiembre de 2010

Hospedería Fonseca (Salamanca)

Problemas

Problema 1

Dados una circunferencia, un punto móvil sobre ella y un punto exterior a la misma, ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios obtenidos a partir de estos dos puntos?

Problema 2

Queremos saber la altura de una torre. Observamos la torre des de un ángulo de 63º. Retrocedemos 10m y el ángulo de elevación resulta ser ahora de 35º. ¿Cuál es la altura de la torre?

Problema 3

Des de la plaza de un pueblo veo la iglesia que está a 60m. Giro la cabeza 20º a la derecha y veo un depósito de agua que está a 75m. ¿Qué distancia separa la iglesia del depósito?

Actividad 1 — Secuencia [ ]

Seguid las indicaciones siguientes:

- Archivo | Nuevo
- Dibujad 2 puntos A y B
- En la línea de entrada escribid: Secuencia[Circunferencia[A, r], r, 1, 5]
- En la línea de entrada escribid: Secuencia[Circunferencia[B, r], r, 1, 5]
- En la línea de entrada escribid: Intersección[Elemento[lista1, 1], Elemento[lista2, 1]]
- Moved los puntos A y B de forma que estén muy próximos i se pueda observar la intersección de las dos circunferencias pequeñas.
- En la línea de entrada escribid: { Intersección[Elemento[lista1, 1], Elemento[lista2, 1]] }
- Se ha creado una lista de los puntos de intersección.
- En la línea de entrada escribid: Secuencia[{ Intersección[Elemento[lista1, j], Elemento[lista2, j]] },j,1,5]
- Se ha creado una lista con los puntos de intersección de todas la circunferencias
- Moved los puntos A y B

Actividad 2 — Listas y colores dinámicos

Vamos a resolver el problema siguiente:
Tenemos tres antenas emisoras-receptoras de telefonía. Un usuario se conectará a la que tenga más cercana. ¿Cómo es la región que cubre cada antena?
Seguid las indicaciones siguientes:

- Dibujad tres puntos (las antenas)
- A de color rojo, B de color verde i C de color azul.
- Dibujad un cuarto punto (el teléfono)

- Cread lista de distancias del teléfono a las antenas:
- d={Distancia[A, D], Distancia[B, D], Distancia[C, D]}
- Definid la distancia mínima:
  m=Minimo[d]
- Cread tres puntos:
  A_1=A
  B_1=B
  C_1=C
  De colores rojo, verde i azul respectivamente
- Cambiad las propiedades de los 3 puntos A_1, B_1 y C_1 para que:
  Tengan el máximo grosor
  Sólo se vea cuando sea la antena más cercana al teléfono, en la pestaña **Avanzado**, en la **Condición para exponer el objeto**:
  Para A_1 poned: Elemento[d, 1] == m
  Para B_1 poned: Elemento[d, 2] == m
  Para C_1 poned: Elemento[d, 3] == m
- Cambiad el color del punto D según qué antena tenga más cerca. Accede a las propiedades del punto D, en la pestaña **Avanzado**, en el apartado colores dinámicos poned:
  En Rojo: Elemento[d, 1] <=m (Equivale a Si[Elemento[d, 1] <=m, 1, 0])
  En Verde: Elemento[d, 2] <=m (Equivale a Si[Elemento[d, 2] <=m, 1, 0])
  En Azul: Elemento[d, 3] <=m (Equivale a Si[Elemento[d, 3] <=m, 1, 0])
- Activad el rastro y mover el punto D.

- Pensad el caso que no todas las antenas tengan la misma potencia, por ejemplo: (3,2,1)

Actividad 3 — Secuencia[ ]

Gota de agua

Haréis una construcción sencilla y visualmente atractiva. Se trata de imitar las ondas que se producen al caer una gota de agua en un líquido.

Comenzaréis con una lista de 20 circunferencias concéntricas centradas en el (0,0) y que comienzan con radio 0 hasta radio 10 y que se va incrementando de 0,5 en 0,5.

- Abrid el GeoGebra y comprobad que el idioma es el castellano.
- Mostrad la vista algebraica.
- En la línea de entrada, escribid: Secuencia[Circunferencia[(0, 0), j / 2], j, 0, 20]
- Cread un deslizador que tome valores entre 0 i 20 con un incremento de 1, llamadlo *a*.
- Modificad la lista que habéis creado de forma que quede así:
  Secuencia[Circunferencia[(0, 0), j / 2], j, a, a + 2]
- Moved el deslizador y interpretad las modificaciones ha habéis hecho.

- Acceded a **Edita | Propiedades** y modificad la propiedades siguientes:
- Deslizador
- Velocidad: 5
- **Repite**: Incremento
- Animación automática
- Lista:
- Color: azul claro
- Modificad el color del fondo a azul oscuro.

A continuación, podemos dar a la construcción unos efectos especiales gracias a los colores dinámicos.

- Acceded a **Edita | Propiedades** y seleccionad la lista.
- Acceded a la pestaña **Avanzado** y introducid, respectivamente, en las casillas de los tres colores básicos las funciones sin(a π / 10) , cos(a π / 10) y sin(a π / 10) + cos(a π / 10) .

Esta es una de las posibles combinaciones para conseguir que los colores de las ondas varíen de una determinada manera.

Actividad 4 — AleatorioEntre[]

El tratamiento del azar

El GeoGebra, tiene desde la versión 3.0, la función random () que devuelve un número aleatorio entre 0 y 1, equivalente al procedimiento incorporado en las calculadoras de bolsillo. Es una función y no un comando. Pero es una función sin ningún argumento, por eso los () no tienen nada dentro.

- Escribid en la línea de entrada a = random ().
- Después, por ejemplo, b = 3 * a y C = (3 * random (), 2 * random ()).

Observaréis que el valor del número aleatorio *a* se mantiene en el cálculo de *b*; el echo que los valores de los números aleatorios se mantengan una vez se han definido, es muy interesante para el diseño de actividades didácticas.

En cambio cuando aparece otra llamada a random (), como se hace en el punto C, se generan dos números aleatorios nuevos.

- Escribid en la línea de entrada a = random ().
- Ahora pulsad Ctrl + R o F9 sucesivas veces. Iréis viendo nuevos valores de las variables definidas aleatoriamente y de un punto aleatorio en un rectángulo de 3 × 2.
- Poner **Opciones | Redondeo | 15 cifras decimales** y veréis que los números aleatorios del random () se generan con "todos" los decimales.

A partir de la función random (), si queríamos un número entero aleatorio debíamos construirlo "artesanalmente". Hemos dicho "si queríamos un número entero", así, en pasado, porque a partir de la versión 3.2 el GeoGebra ha incorporado comandos propios que facilitan la posibilidad de trabajar con números aleatorios. El comando que utilizaremos es AleatorioEntre [a, b] donde a y b son números enteros, a < b. Este comando devuelve un número entero aleatorio entre a y b, ambos incluidos, con la misma probabilidad para todos estos números.

Rectas al azar (http://www.xtec.cat/~jbujosa/GeoGebra/funcions/Funcions.htm)

En esta práctica queremos hacer una construcción que ayude al alumnado a hallar la fórmula de una función lineal o afín a partir de su gráfica. Para que puedan hacer muchos ejercicios, utilizaremos el tratamiento del azar que tiene el programa.

- Empezaremos por los números aleatorios que utilizaremos:
- Escribid en la línea de entrada:

  b = AleatorioEntre [-5, 5]

  a1 = AleatorioEntre [-4, 4]

  a2 = AleatorioEntre [1, 4]

  a= a1/a2.
- A continuación, entrad y = a x + b.
- Pulsad varias veces F9 o Ctrl+R y veréis como van saliendo las diferentes rectas cuyas pendientes son el cociente entre a1 y a2.

Ya os dais cuenta de la idea. Cada recta que aparece es un nuevo ejercicio para los alumnos. A continuación podéis crear un triángulo móvil que ayudará a hallar la pendiente de cada recta.

- Hallad la intersección entre la recta y el eje vertical (supongamos que es A).
- Definid la recta y = b.
- Definid un punto (supongamos que sea B) sobre esta recta.
- Definid una recta perpendicular a la recta anterior que pase por el punto B.
- Hallad la intersección entre esta perpendicular y la recta aleatoria (sea C).
- Dibujad el triángulo ABC.
- Dad color a los lados y al interior del triángulo.
- Ahora queremos que el tamaño del segmento vertical del triángulo tenga signo para poder calcular directamente las pendientes positivas y negativas.
- Definid la variable v = y (C) - y (B).
- Hallad el punto medio del lado vertical del triángulo (sea D).
- Definid el texto "" + v asociado al punto D. Así este texto siempre estará cerca del lado vertical con signo positivo o negativo según la pendiente.
- Visualizad la etiqueta del lado horizontal.

A continuación entraréis los textos de la fórmula de la función.

- Definid el texto "y \; = \, \frac{" + a1 + " }{" + a2 + " }\;x" + b con la opción **Fórmula LaTeX** activada.
- Definid el texto "" + c donde *c* es el nombre que el programa a dado a la recta y = ax + b.
- Definid una casilla de control que permita mostrar/ocultar el triángulo y otra para los textos.
- Terminad los detalles estéticos.

Actividad 5

Derivadas y tangentes

Con el GeoGebra también se puede trabajar con las derivadas de las funciones. Además, tiene un procedimiento muy rápido para dibujar rectas tangentes. Esto hace que se pueda visualizar fácilmente el concepto de derivada.

- Introducid la expresión $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
- Introducid ahora $f'(x)$.

Ya tenéis dibujadas la función *f(x)* y su derivada. Si lo deseáis, podéis dar diferentes colores a sus gráficas.

- Cambiad la función *f(x)*, desde la ventana algebraica o bien entrando directamente una nueva fórmula.
- A continuación, siguiendo las instrucciones, podéis diseñar una actividad para introducir el concepto de derivada en un punto y de función derivada.
- Entrad la fórmula de la función que utilizaremos para trabajar el concepto de función derivada:

  $f(x) = x^3 / 12 - x^2 / 2 + 4$ (Claro que podéis entrar otra cualquiera!)
- Para evitar movimientos accidentales de esta gráfica, Clicad con el botón derecho del ratón para acceder a las **Propiedades**. Elegid **Básico** y activad la opción **Objeto fijo**. De esta manera, esta gráfica quedará fija.
- Con la herramienta **Punto nuevo** cread un punto A sobre el eje de abscisas.
- Introducid (x(A), f(x(A))), un punto que quedará situado sobre la gráfica. Es el punto B.
- Introducid Tangente [B, f]. Obsérvese que se ha dibujado, directamente, la recta tangente a la gráfica de f (x) que pasa por B.
- Entrad el comando Pendiente [a], donde *a* es el nombre de la recta tangente (comprobar que es así abriendo la ventana algebraica y luego volved a cerrarla). Obsérvese que se ha dibujado un triángulo pequeño que nos indica la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto B. Es mejor que los rótulos de este objeto sean visibles con **Nombre y Valor**.
- Moved el punto A y observad como la pendiente va variando.
- Dibujad el segmento AB con una línea discontinua.

A continuación definiremos el punto P a partir de la definición de derivada.

- Entrad la definición del punto P como P = (x (A), b), donde x (A) es la primera coordenada del punto A y b es la pendiente de la recta tangente en A. Ya veis que estamos usando la definición de derivada en un punto.
- Haced clic con el botón derecho del ratón sobre el punto P y acceded a la opción **Propiedades**. Ahora, se puede cambiar el color del punto y, sobre todo, se debe activar la opción **Activar el rastro**. De esta manera cuando el punto B se mueva, dejará un rastro que será la función derivada.
- Eligiendo la herramienta correspondiente, desplazad el punto A y observad el dibujo. ¿Es la función derivada? Para comprobarlo: Entrad el comando $g(x) = f'(x)$.
- Observad en la ventana algebraica que se ha creado la función g(x), que es la derivada de la función f (x). También ya se ve la gráfica de g(x), es decir, de $f'(x)$.
- Clicando sobre esta gráfica con el botón derecho se puede acceder a **Propiedades** y cambiar el color y el estilo.
- Moved el punto A y observad como el rastro del punto coincide con la gráfica de la función derivada.

- Introducid la casilla de control para mostrar u ocultar la gráfica de la derivada.
- Para borrar el rastro, pulsad Ctfl-F.

Si queréis algo más animado, podéis construir lo siguiente: **La bici que sube y baja**. En la dirección http://www.xtec.cat/~jbujosa/GeoGebra/derivades/pujabaixa/BiciPujaBaixapag.html veréis la construcción acabada.

Construcción:

- Evitad que sean visibles los rótulos. (**Opciones | Rotulado**)
- Definid el deslizador *m*, vertical, de tamaño 50 y con sólo dos valores posibles: el 0 y el 1. Este deslizador nos pasará del movimiento automático al manual.
- Entrad los textos que lo acompañan.
- Definid un punto C sobre el eje de abscisas.
- Introducid la función f(x) = x sin (x) / 3. Evidentemente podéis elegir otra.
- Definid un deslizador, llamado *d*, que nos dará el movimiento automático. Su valor variará en el intervalo [-14, 14] con incrementos de 0.01. Activad la animación con la opción **Incremento** activada.
- Introducid el punto A = (d, 0) * m + C * (1-m). Lo definimos así para poder trabajar en manual o en automático.
- Introducid el punto B = (x(A), f(x(A))).
- Definid la recta a = Tangente[B, f].
- Entrad la expresión e = Pendiente[a]. Quedará dibujado el triángulo que nos indica la pendiente de la recta tangente.

A continuación, insertareis la imagen y gestionaréis sus medidas y la posición.

- Elegid la herramienta **Insertar imagen** y clicad en un punto de la zona gráfica. A continuación, acceded a la imagen que se desea insertar y que debéis tener guardada previamente.
- Definid el deslizador *b* entre de -5 i 5. Este punto deslizante sólo lo usaremos para controlar el tamaño de la imagen.
- Con el botón derecho del ratón, acceded a las **Propiedades** de la imagen.
- Acceded a la ficha **Posición**. Veréis que hay tres casillas para entrar las coordenadas de las esquinas 1, 2 y 4, que corresponden a las que se indican en la figura siguiente:

De esta manera podemos controlar las medidas y la posición de la figura y, incluso, podemos deformarla. A continuación, entraremos unas expresiones en estas casillas para conseguir y controlar el movimiento de la imagen.

- Haced que el punto deslizante *b* tome el valor 0.6.
- Entrad, en **Esquina 1**, la expresión B - b * VectorUnitario[a] - (0, 0.1) y **Esquina 2**, B + b * VectorUnitario [a] - (0, 0.1).

¿Qué significan estas expresiones?

VectorUnitario[a] representa el vector director unitario, con primera componente positiva, de la recta tangente *a*.

El punto B recorre la gráfica de la función.

El deslizador *b* controla las medidas de la figura.

Usamos el vector (0,0.1) para corregir la posición de la figura y hacer que esté más pegada a la gráfica.

- Comprobad el movimiento de la imagen, tanto en manual como en automático. A continuación, controlad la velocidad de la imagen.
- Haced invisible el deslizador *b*.
- Acceded a las propiedades del deslizador *d*, que controla el movimiento. Vaya a la ficha **Deslizador**. Entrad en la casilla **Velocidad** la expresión m * Máx [3 - e, 0.3]. Está claro que esta expresión no es única y depende del efecto que desee dar a la imagen. Tenga en cuenta que cuando m = 0, la velocidad es 0.

Comprobad el efecto creado. Ahora nos dedicaremos a la función derivada.

- Introducid la derivada escribiendo f '(x). Que sea invisible.
- Introducid la expresión g (x) = Función [f '(x), -15, x (A)]. Esta expresión nos dibujará la derivada hasta la altura actual del punto A.
- Definid el punto P = (x (A), g (x (A))). Éste será el punto que parecerá que dibuja la derivada a partir del movimiento de A.
- Dibujad el segmento BP y el segmento AB, con el mismo estilo y color para mejorar la presentación.
- Ahora, las casillas de control. Cread la casilla de control *Tangente* para controlar la visibilidad de la tangente y del triángulo de la pendiente.
- Cread la casilla de control *Derivada móvil* para controlar la visibilidad de la función g (x), del punto P y del segmento BP.
- Cread la casilla de control *Función derivada* para controlar la visibilidad de f '(x).
- Cread la casilla de control *Imagen* para controlar la visibilidad de la imagen.
- Además habrá que entrar más condiciones en los diferentes elementos que aparecen y desaparecen.

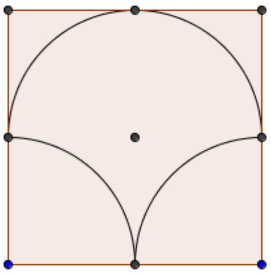
Actividad 6

Creación de nuevas herramientas

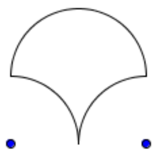
El GeoGebra permite crear nuevas herramientas que pueden ser útiles en futuras construcciones. Veamos un ejemplo.

- Dibujad un cuadrado con la herramienta **Polígono regular**.

- A continuación, dibujad los puntos medios y los arcos necesarios para llegar a la figura siguiente, sin rótulos.



- Seleccionad la herramienta **Creación de herramienta nueva**. Se ha abierto una ventana.
- Seleccionad con un clic sobre la misma figura, los arcos que deben formar la nueva herramienta de manera que queden incorporados en el apartado de **Objetos de salida**.
- Dejad que los objetos de entrada sean los puntos iniciales A i B.
- Seleccionad **Nombre** e **icono**, donde podéis hacer algún cambio y terminad con **Concluido**.
- La herramienta se ha incorporado y ya la podéis utilizar a partir de dos puntos iniciales.



Podéis hacer diferentes figuras con esta nueva herramienta sin necesidad de repetir todo el proceso. Si accedéis al menú **Herramientas | Gestión de herramientas** podéis guardar la herramienta con un nombre propio y cargarla, más adelante, en nuevas ventanas de GeoGebra.

Direcciones interesantes

ACG: http://acgeogebra.cat/moodle/

IGC: www.geogebra.es

Grup 4D: www.geometriadinamica.es

Daniel Mentrard: http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/index.htm

Manuel Sada: http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm

Pep Bujosa: http://www.xtec.es/~jbujosa/GeoGebra/PracGeoGebra.htm

Rafa Losada: http://www.iespravia.com/rafa/rafa_geogebra.htm

Rafael Miranda: http://www.geometriadinamica.cl

Ignacio Larrosa: http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/index.html

Sebastià Mora: http://www.xtec.cat/~smora

Math247: http://math247.pbworks.com/GeoGebra

Andreas Meier: http://www.realmath.de/Mathematik/newmathen.html

Dave Matthews, Chair:

http://www.mnwest.edu/fileadmin/static/website/dmatthews/Geogebra/GeogebraAppletIndexB.htm

Maddalena Falanga y Luciano Battaia http://www.batmath.it